LEZIONE 20

lunedì 14 novembre 2022 09:02

TEOREMA (CRITERIO DI MONOTONIA)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I.
Allora valgono le seguenti equivalenze:

1) f è monotona crescente in $I \iff f'(x) \geq 0$ in I
2) f è monotona decrescente in $I \iff f'(x) \leq 0$ in I
3) f è monotona strettamente crescente in $I \Rightarrow f'(x) \geq 0$ in I
4) Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente monotona crescente in I
5) f è monotona strettamente decrescente in $I \Rightarrow f'(x) \leq 0$ in I
6) $f'(x) < 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente monotona decrescente in I.

IDEA DELLA DIM DI 1)

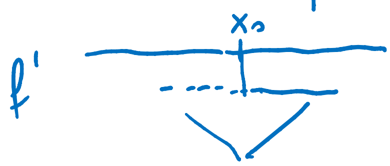
- Se f è monotona crescente in I: $\forall\, x, y \in I$ con $x < y$ si ha ~~si ho~~ $f(y) \geq f(x)$. Allora $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$. Quindi

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0. \Rightarrow f'(x) \geq 0.$$

- Viceversa se $f'(x) \geq 0$, allora $\forall\, y \in I$ con $y > x$ si può applicare il teorema di Lagrange a $[x, y]$:
$\exists\, c \in (x, y)$ t.c. $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$. $\square$

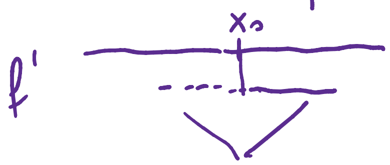
CONSEGUENZA

Il segno di f' ci aiuta a trovare i punti di max e min locale.
Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile in I.
Se $x_0 \in I$ e $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f' > 0$ in $U \cap (x_0, +\infty)$ e $f' < 0$ per $x \in U \cap (-\infty, x_0)$, allora x_0 è punto di min locale per f in I.



Analogamente:

Se $x_0 \in I$ e $\exists\, U \in \mathcal{I}_{x_0}$ t.c. $f' > 0$ in $U \cap (x_0, +\infty)$ e $f' < 0$ per $x \in U \cap (-\infty, x_0)$, allora x_0 è punto di min locale per f in I.



ESERCIZIO

Disegnare il grafico di $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

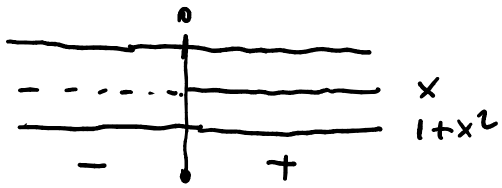
- **Dominio**: $1 + x^2 \neq 0 \iff x^2 \neq -1 \iff \forall x \in \mathbb{R}$.

  $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

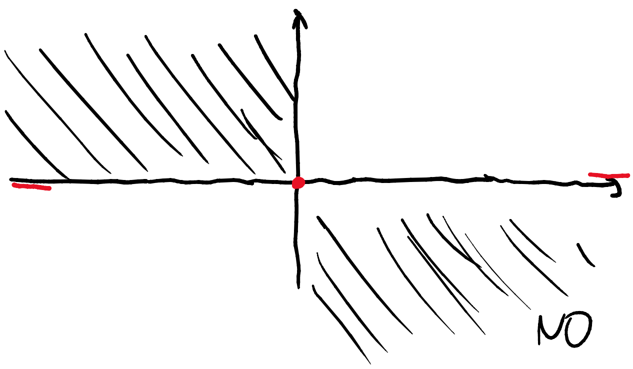
- f è dispari $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x)$.

- **Segno**:

  $\frac{x}{1+x^2} \geq 0$



$f > 0$ in $(0, +\infty)$
$f < 0$ in $(-\infty, 0)$
$f = 0 \iff x = 0$



- **Limiti**:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{x}_{+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}+1\right)} = \frac{1}{+\infty \cdot 1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

(Stesso procedimento del $\lim_{x\to+\infty}$.
Oppure si può osservare che f è dispari quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$)

La retta $y=0$ è un asintoto orizzontale

• **Derivata**

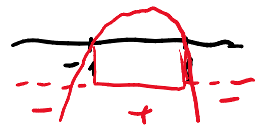
$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Segno di f':

Numeratore:

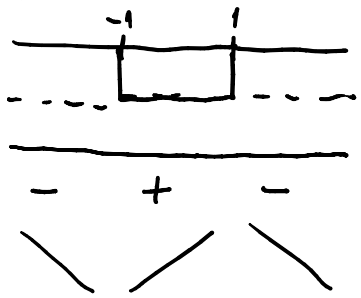
$1-x^2 \geq 0 \iff 1 \geq x^2 \iff 1 \geq |x| \iff -1 \leq x \leq 1$

(oppure $1-x^2=0 \iff x=\pm 1$ e $1-x^2$ rappresenta una parabola con concavità verso il basso quindi $1-x^2 \geq 0$ se $-1 \leq x \leq 1$.



Denominatore:

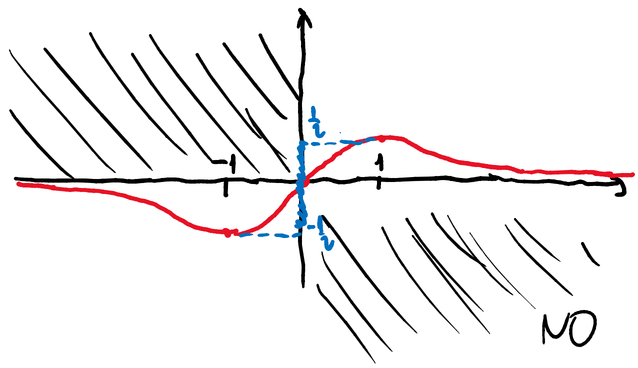
$(1+x^2)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$f'=0 \iff x=1 \lor x=-1$.

$x=-1$ è un punto di min locale

$x=1$ è un punto di max locale.



$$f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$
$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

Domanda: Qual è l'immagine di f?

$f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Derivate seconde e derivate di ordine superiore:

Se $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile in I, allora $f': I \to \mathbb{R}$ e possiamo chiederci se f' è derivabile. Se lo è possiamo calcolarne la derivata che chiameremo derivata seconda.

Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I. Sia $x_0 \in I$. Se f' è derivabile in x_0, si dice che f è DUE VOLTE DERIVABILE in x_0 e la derivata $(f')'(x_0)$ si dice DERIVATA SECONDA di f in x_0 e si indica con $f''(x_0)$

(oppure $f''(x)$, $(f(x))''$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, $f^{(2)}(x)$)

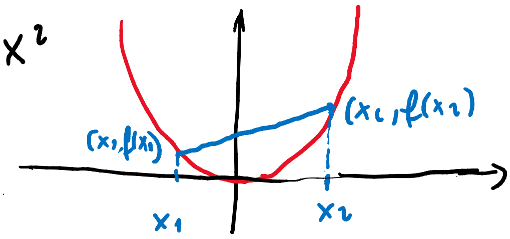
Def: Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in I$. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se f è $n-1$ volte derivabile in I e $f^{(n-1)}$ è derivabile in x_0 allora si dice che f È n VOLTE DERIVABILE IN x_0 e la derivata $(f^{(n-1)})'(x_0)$ si dice DERIVATA N-ESIMA di f in x_0 e si indica $f^{(n)}(x_0)$.

ESEMPIO

$$f(x) = x^3 + 3x - 2$$
$$f'(x) = 3x^2 + 3$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6$$
$$f^{(4)}(x) = 0$$
$$f^{(15)}(x) = 0$$

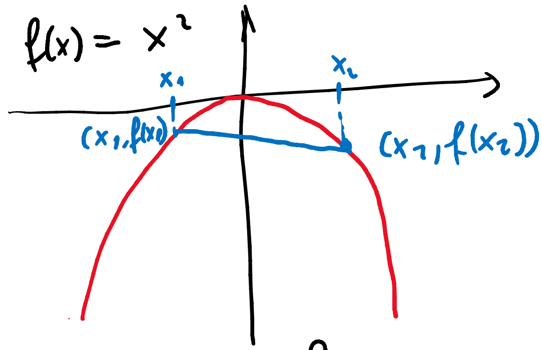
Convessità e concavità

$f(x) = x^2$

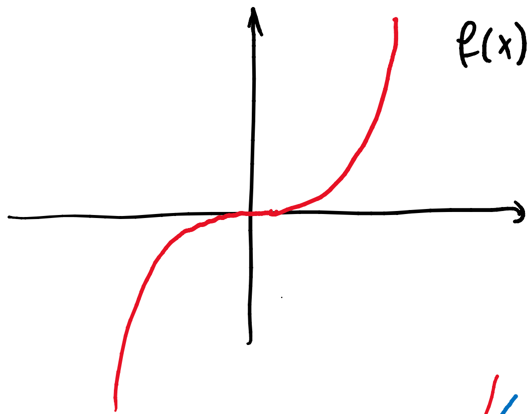


x^2 è convessa

$f(x) = x^2$



$-x^2$ è una funzione concava.



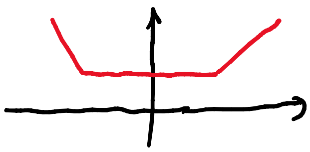
$f(x) = x^3$

convessa in $(0, +\infty)$

concava in $(-\infty, 0)$

- f convessa
- f' è monotona crescente
- $f'' \geq 0$.

Def. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è CONVESSA in I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ il segmento in $\mathbb{R}^2$ di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non contiene punti sotto il grafico di f.



Si dice che f è CONCAVA in I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non contiene punti che stanno sopra il grafico di f.

TEOREMA

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I. Allora sono equivalenti:

1) f è convessa in I (risp. concava in I)

2) f' è crescente in I (risp. decrescente in I)

3) $\forall x, y \in I$: $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$. (risp. $\leq$)

Se inoltre f è due volte derivabile in I allora le affermazioni precedenti sono equivalenti a:

4) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$. (risp. $f''(x) \leq 0$)

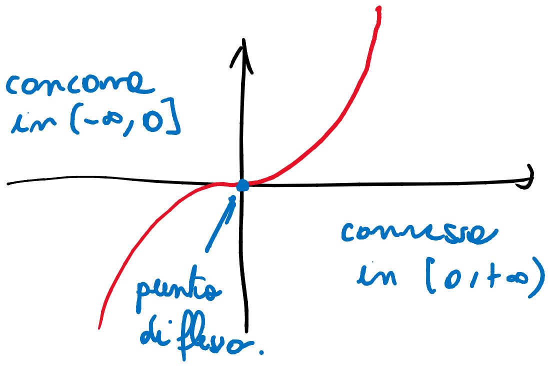
$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$f''(x) \geq 0$ in $[0, +\infty)$

$f''(x) \leq 0$ in $(-\infty, 0]$



Def: Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I e sia $x_0 \in I$. Si dice che x_0 è un **PUNTO DI FLESSO** per f se $\exists U \in I_{x_0}$ tale che:

- f' è cresente in $U \cap (x_0, +\infty)$ ($f'' > 0$ in $U \cap (x_0, +\infty)$)

e

- f' è decresente in $U \cap (-\infty, x_0)$ ($f'' < 0$ in $U \cap (-\infty, x_0)$)

oppure:

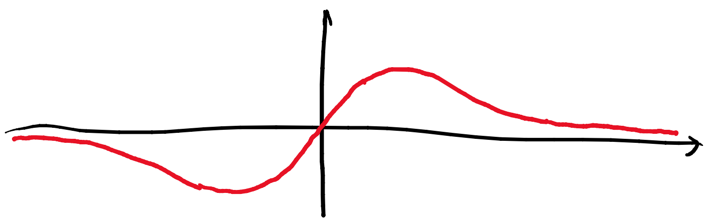
- f' è decrescente in $U \cap (x_0, +\infty)$ ($f'' < 0$ in $U \cap (x_0, +\infty)$)

e

- f' è cresente in $U \cap (-\infty, x_0)$. ($f'' > 0$ in $U \cap (-\infty, x_0)$)

ESEMPIO

$f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$



$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)\,2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

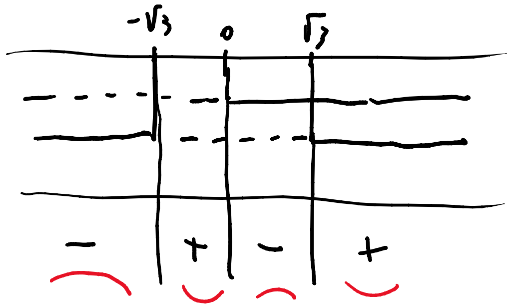
$$= \frac{-2x\cancel{(1+x^2)}\left((1+x^2) + 2(1-x^2)\right)}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

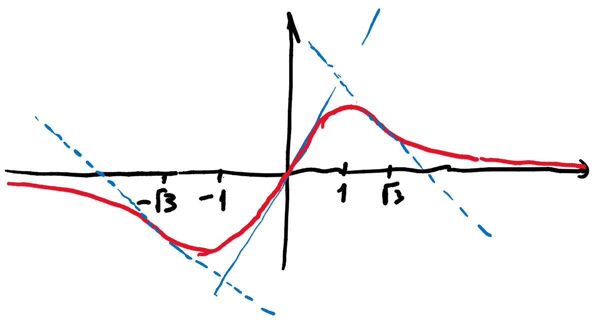
$$= \frac{-2x\,(1+x^2+2-2x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{-2x\,(3-x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{2x\,(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

Segno di f'':

- $x \geq 0$ in $[0,+\infty)$
- $x^2-3 \geq 0 \iff x \geq \sqrt{3} \ \vee\ x \leq -\sqrt{3}$
- $(1+x^2)^3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

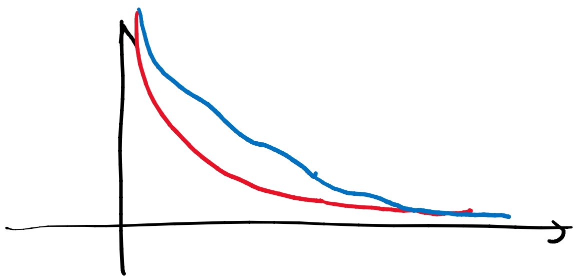




$x=0$, $x=\sqrt{3}$ e $x=-\sqrt{3}$ sono punti di flesso.

ESEMPIO

$f(x) = \frac{1}{x}$ in $(0,+\infty)$



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ $\quad$ f è decrescente

Per stabilire se il grafico giusto è quello rosso o no calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \left(-x^{-2}\right)' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} > 0 \text{ in } (0,+\infty)$$

Questo ci dice che f è convessa in $(0,+\infty)$.

Riepilogo su studio di funzioni

1) Dominio
2) Ricerca di simmetrie o periodicità
   (f è pari / dispari o periodica)
3) Segno e zeri della funzione. (SE POSSIBILE)
4) Limiti significativi / asintoti.
5) Derivabilità e calcolo della derivata.
6) Segno della derivata: monotonia / max e min locali
7) Derivata seconda e convessità (SOLO SE RICHIESTO)
8) Grafico.

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}$$

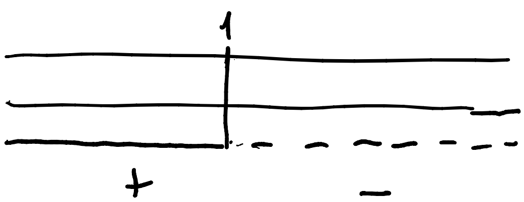
1) Dominio: $1 - x \neq 0 \iff x \neq 1$

$$Dom(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

2) Simmetrie: non ci sono simmetrie.

3) Segno:

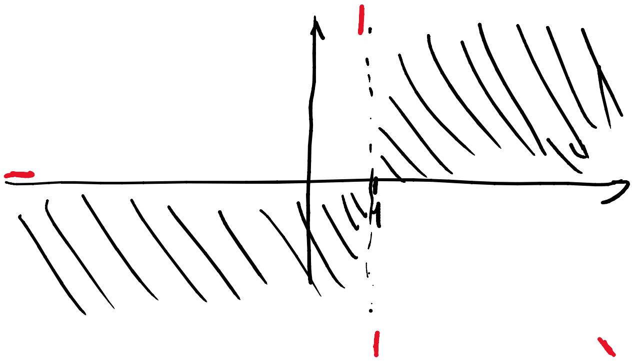
- $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $1 - x > 0 \iff x < 1$



$f>0$ in $(-\infty, 1)$

$f<0$ in $(1, +\infty)$

$f \neq 0 \quad \forall x \in Dom(f)$



4) limiti e asintoti:

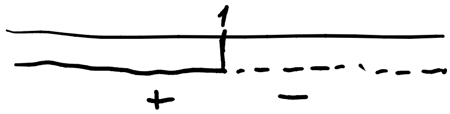
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1-x} = \frac{0}{+\infty} = 0.$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1-x}$ f.i. $\frac{+\infty}{-\infty}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{+\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{x}-1}}_{-1} = +\infty \cdot (-1) = -\infty.$$

$+\infty$ gerarchia degli infiniti

- $\lim_{x \to 1^-} \frac{e^x}{1-x} = \frac{e}{0^+} = +\infty$ Segno di $1-x$



- $\lim_{x \to 1^+} \frac{e^x}{1-x} = \frac{e}{0^-} = -\infty$

Asintoti:

$y=0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

$x=1$ è asintoto verticale

Ci sono asintoti obliqui?

$y = mx + q$

$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx$.

Se m esiste e $m \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ allora $y = mx + q$ è un asintoto obliquo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x(1-x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{x}-1}}_{\to -1} = -\infty$$

non ci sono asintoti obliqui.

5) <u>Derivata</u>:

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1-x) - e^x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{e^x(1-x) + e^x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$$

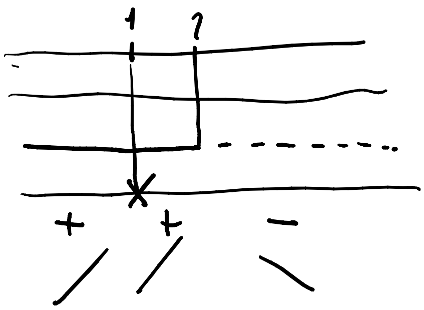
6) <u>Segno di f'</u>:

$\dfrac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$:

$e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$2 - x > 0 \iff x < 2$

$(1-x)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$



$f' > 0$ in $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$

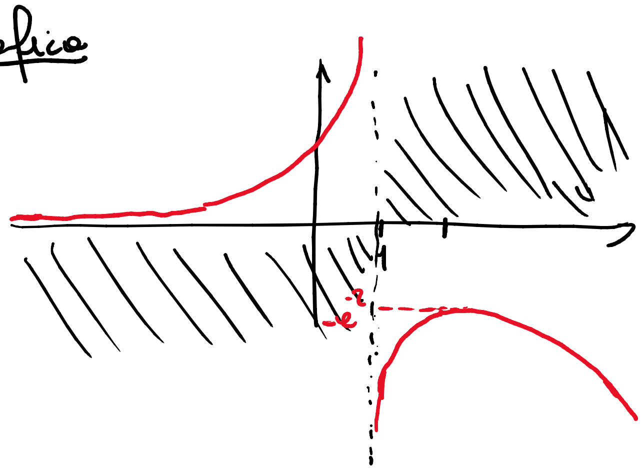
$f' < 0$ in $(2, +\infty)$

$f' = 0$ per $x = 2$.

$x = 2$ è un punto di max locale per f.

Per ora saltiamo la derivata seconda:

<u>Grafico</u>



$$f(2) = \frac{e^2}{1-2} = -e^2$$

<u>Derivata seconda</u>:

$$f'(x) = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left(e^x(2-x) + e^x(-1)\right)(1-x)^2 - e^x(2-x)\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{e^x(1-x)^3 + 2e^x(2-x)(1-x)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{e^x(1-x)\left(1-2x+x^2+2(2-x)\right)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{e^x(5-4x+x^2)}{(1-x)^3}$$

$e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$5 - 4x + x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (\Delta = 16 - 20 < 0)$

$(1-x)^3 > 0 \iff x < 1.$

$f'' > 0$ per $x < 1$

$f'' < 0$ per $x > 1.$